LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	**Diplôme d'accès aux études supérieures** **Session 2018**
MODULE	**ÉPREUVE ÉCRITE**
Mathématiques	*Durée de l'épreuve* 2h (120 min.)
	Date de l'épreuve 7 juin 2018
	Numéro du candidat DAES - CT - 30

Question 1

(0,5+0,5+ (0,5+0,5) + (0,5+0,5) +1+1 = 5 points)

Le premier janvier 2000, deux bébés viennent au monde : Urbain et Victor.

Leurs familles respectives décident alors d'épargner pour leur enfant.

La famille d'Urbain verse 3000€, le jour de la naissance de leur fils, sur un compte où le taux d'intérêt annuel est de 2,75%. Aucun retrait ni dépôt ne s'effectuent pendant les années suivantes. Le taux d'intérêt reste fixe.

La famille de Victor place 1000 € dans une tirelire le 01/01/2000 et y verse ensuite, chaque premier janvier suivant, 240 € sans jamais effectuer de retrait.

On appelle u_n le montant en euros du compte d'Urbain le premier janvier de l'année $(2000+n)$. On a $u_0 = 3000$.

On appelle v_n le montant en euros de la tirelire de Victor le premier janvier de l'année $(2000+n)$. On a $v_0 = 1000$.

1. Calculer l'argent disponible pour chaque enfant le jour de leur premier anniversaire, le 1/01/2001.

2. Calculer l'argent disponible pour chaque enfant le jour de leur deuxième anniversaire, le 1/01/2002.

3. a. La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ou géométrique ? Déterminer sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

4. a. La suite (v_n) est-elle une suite arithmétique ou géométrique ? Déterminer sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

5. Victor peut disposer de la totalité de l'argent de sa tirelire après son 18e anniversaire. Sa famille poursuit les versements annuels.
   Avec la somme disponible dans sa tirelire, pourra-t-il acheter une voiture d'une valeur de 6000€ dès le 2 janvier 2018 ? Si non, à partir de quelle année aura-t-il assez d'argent dans sa tirelire pour acheter la voiture ?

6. Urbain souhaite aussi acheter une voiture d'une valeur de 6000€ mais sa famille ne fait aucun nouveau dépôt sur son compte.
   À partir de quelle date d'anniversaire Urbain aura-t-il assez d'argent sur son compte pour acheter la voiture ?

Question 2 : *(3 points)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou multiple enlève 0,5 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Recopier le numéro de la question et la réponse exacte.

1. La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10}$ est :

   a. 1,74   b. $\frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2}$ c. $-\frac{\ln 3}{\ln 5}$ d. 0,5

2. f est la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

   a. $f'(x) = -2e^{-2x+3}$ b. $f'(x) = e^{-2x+3}$
   c. $f'(x) = (-2x+3)e^{-2x+3}$ d. $f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+3}$

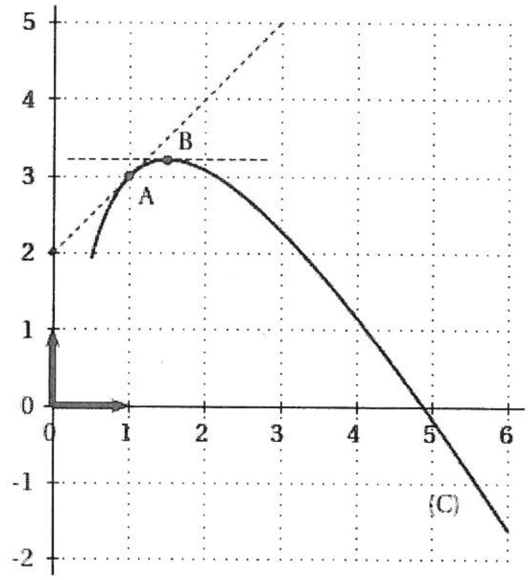
3. On considère le nombre $I = \int_0^1 \left(2e^{2x} + 3\right) dx$

   a. $I = e^2 + 3$ b. $I = e^2 + 2$ c. $I = 2e^2 + 3$ d. $I = 2e^2 - 2$

Question 3 :

([0,5+1+0,5] + [1+1,5+1+1+(0,5+1)] = 8 points)

La courbe (C) ci-contre représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $\left[\frac{1}{2};6\right]$. Les points $A(1;\,3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude graphique

1. Déterminer $f'(1,5)$.
2. La tangente à la courbe (C) passant par A passe aussi par le point de coordonnées $(0;2)$. Déterminer une équation de cette tangente par lecture graphique.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};6\right]$ et en donner une valeur approchée avec la précision que permet le graphique.

Partie B : Etude Analytique

On admet que la fonction f est définie sur $\left[\frac{1}{2};6\right]$ par $f(x)=-2x+5+3\ln x$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $\left[\frac{1}{2};6\right]$ et écrire le résultat sous forme d'une seule fraction.
2. Étudier le signe de f' sur $\left[\frac{1}{2};6\right]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\left[\frac{1}{2};6\right]$. On donnera la valeur exacte de l'extremum et une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente à (C) au point A d'abscisse 1 et vérifier le résultat trouvé dans la partie A à la question 2.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution α sur $\left[\frac{1}{2};6\right]$.

   Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5. On considère la fonction F définie sur $\left[\frac{1}{2};6\right]$ par $F(x)=-x^2+2x+3x\ln x$.

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{2};6\right]$.

   b. En déduire l'aire exacte, en unités d'aires, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

Question 4 :

(1+0,5+ (1+1) + 0,5 = 4 points)

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS.
Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.

Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le deuxième jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.

Soit g la fonction définie par $g(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction g modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x-ième jour.

1. Avec les données de l'énoncé, écrire un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.

2. Ce système est équivalent à l'équation $AX=B$ avec

   $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$ et A une matrice 3x3.

   Déterminer A.

3. a. Ce système a-t-il une solution unique ? Expliquer.

   b. Déterminer la matrice A^{-1} et en déduire les valeurs de a, b et c.

4. Le parc de la ville peut accueillir au maximum 2500 personnes.
   Selon le modèle défini grâce à la fonction g, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ? Expliquer.